

## Ejercicios: 1<sup>er</sup> Parcial

1. Sea  $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  una sucesión de variables aleatorias i.i.d. Normales con media 0 y varianza 1. Sea  $Y(n)$  el proceso estocástico definido por

$$Y(n) = 2X_n - X_{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

- Calcular la distribución de la variable  $Y(3)$ .
- Calcular las covarianzas  $\text{Cov}[Y(3), Y(4)]$ ,  $\text{Cov}[Y(3), Y(2)]$ ,  $\text{Cov}[Y(3), Y(-7)]$ .
- Indicar para cuales valores de  $n$ , la variable  $Y(n)$  es independiente de  $Y(3)$  y justificar la respuesta.
- Escribir la función media  $\mu(n)$  y la función de autocovarianza  $\text{Cov}(n, m)$  del proceso  $Y(n)$ .
- Indicar si el proceso es estacionario y en que sentido.

(3 Puntos)

2. Dada la cadena de Markov con estados  $\{1, 2, 3, 4\}$  y matriz de transición

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10\% & 50\% & 40\% \\ 10\% & 0 & 90\% & 0 \end{pmatrix}$$

y asumiendo que la distribución inicial es

$$\pi(0) = (0 \quad 0 \quad 1/4 \quad 3/4).$$

- Dibujar el diagrama de transición, caracterizar los estados y sus periodos.
- Calcular la distribución de  $X(1)$  y el valor medio de  $(X(1))^3$ .
- Calcular el número medio de visitas que la cadena hará al estado 4.
- Calcular la probabilidad de que la cadena visitará el estado 1.
- Calcular la distribución de  $X(\infty)$ , su valor medio y su varianza.

(4 Puntos)

3. Dada la cadena de Markov con estados  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  y matriz de transición

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 80\% & 20\% & 0 & 0 & 0 \\ 30\% & 70\% & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 30\% & 40\% & 15\% & 15\% \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Dibujar el diagrama de transición, caracterizar los estados y sus periodos.
- Calcular la distribución límite (si existe) empezando en el estado 1.
- Calcular la distribución límite (si existe) empezando en el estado 5.
- Calcular la familia de distribuciones estacionarias de la cadena.

*Nota: Para resolver el problema **NO** es necesario invertir matrices de dimensión  $5 \times 5$ .*

(3 Puntos)